

Title	非線型整数計画法について (数値解析の基礎理論とくに誤差解析の技法と実例)
Author(s)	西見, 二昭
Citation	数理解析研究所講究録 (1972), 153: 176-194
Issue Date	1972-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/106827
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

非線型整数計画法について

中央大・理工 西 見 二 昭

§ 1 序

通常、整数計画法とは線型計画問題に於て整数解の範囲内で最適解を追求することの意味に用いられる。この分野では、LP では見られなかった困難が多々存在するにもかかわらず、近年各種のかなり実用的な手法が開発されている。一方「非」線型計画問題の整数値最適解を求める方法——非線型整数計画法——については、未だ実用的なアルゴリズムは存在しない。

筆者の経験によれば、F. Glover⁽¹⁾の“*surrogate constraint*”の手法（これは線型整数計画法のために開発された）は種々の整数計画法のアルゴリズムと併用するとき多くの場合後者の能率化に極めて有効であった。しかも以下に示されるように“*surrogate constraint*”の理論上の有効性は、目的関数や制約不等式の線型性に全く依拠していない⁽²⁾。このことは非線型計画法における“*surrogate constraint*”を系統的

に活用した実用的解法の可能性も示唆している。

従ってまた、非線型整数計画問題に於ける“*s-surrogate constraint*”を今後このように略記する)を構成する実用的な手法の開発が、この角度からのアプローチにとって不可欠となってくる。本稿後半では、“*s-surrogate*”の一つの簡明な構成法(非線型性が余り強くない場合に有効)を示した。

使用する主な記号を以下に掲げておく。

$M = \{1, \dots, m\}$, m : 制約不等式の個数。

$N = \{1, \dots, n\}$, n : 変数の個数。

λ_j ($j \in N$) : 正の整数。

x : 実 n -ベクトル。

$X = \{x \mid 0 \leq x_j \leq \lambda_j \ (j \in N)\}$

$\Omega = \{x \mid x \in X, \ x_j \text{ integer } (j \in N)\}$

$U = \{(u_1, \dots, u_m) \mid u_i \geq 0 \ (i \in M), \ \exists i \in M \ (u_i \neq 0)\}$

$g(x), F_1(x), \dots, F_m(x)$: X を含む \mathbb{R}^n のある領域で定義された実数値関数で、連続的微分可能。

§2 非線型整数計画法における“*surrogate constraint*”

ここでとりあつかう非線型計画法問題は次の形のものである。

[問題 I] $\Omega_0 = \{x \mid F_i(x) \geq 0 \ (i \in M), \ x \in \Omega\}$ において

$g(x)$ を最小にする x を求めよ。

今後これを次のように略記する。

$$[I] \quad \min \{g(x) \mid F_i(x) \geq 0 \ (i \in M), x \in \Omega\}$$

[I] から整数値制約条件を除くと次の [F] が得られる。

$$[F] \quad \min \{g(x) \mid F_i(x) \geq 0 \ (i \in M), x \in X\}$$

[I] または [F] に対する "δ-制約" とは, 任意の $u \in U$ から得られる $\sum_{i=1}^m u_i F_i(x) \geq 0$ なる不等式のことをいう。 $u_i \geq 0$ かつ $u \neq 0$ であるから $M^+(u)$ を

$$M^+(u) = \{i \mid u_i > 0\} \subset M$$

と定義すると, U の定義から $M^+(u) \neq \emptyset$ である。

[I], [F] にあける m 個の制約式 $F_i(x) \geq 0 \ (i \in M)$ を, ある δ-制約でおきかえた問題をそれぞれ [IS], [FS] とする。即ち,

$$[IS] \quad \min \{g(x) \mid f(x) \geq 0 \ (f = uF, u \in U), x \in \Omega\}$$

$$[IF] \quad \min \{g(x) \mid f(x) \geq 0 \ (f = uF, u \in U), x \in X\}$$

次の lemma が示すように, δ-制約は元の m 個の制約条件の「代理」として原問題の種々の情報を提供する。

(lemma)

1° \bar{x} が [I] で feasible $\Rightarrow \bar{x}$ は [IS], [FS] で feasible.

2° [IS] が infeasible \Rightarrow [I] は infeasible.

[FS] が infeasible \Rightarrow [I], [F] は infeasible.

3° \bar{x} が [IS] または [FS] の feasible solution.

$$\Rightarrow \exists i \in M^+ (F_i(\bar{x}) \geq 0).$$

\bar{x} が [IS] または [FS] の feasible solution

$$\Rightarrow [\exists i \in M^+(F_i(\bar{x}) < 0) \Rightarrow \exists k \in M^+(F_k(\bar{x}) > 0)]$$

4° $[IS], [I]$ の optimal solution をそれぞれ \bar{x}, \hat{x} とすると $g(\bar{x}) \leq g(\hat{x})$

5° $[IS]$ の optimal solution or $[I]$ is feasible
 \Rightarrow それは $[I]$ の optimal solution である。

この lemma によつて, enumerative に 整数計画問題 $[I]$ を解くために $[IS]$ に対する infeasible vector は初めから考慮しなくてよいし, またある S -制約下での optimal vector を \bar{x} とするとき, 4° によって, $g(\bar{x}) \leq g(x)$ を満足しない格子点は全部棄却して差支えない。

tree search 型のアルゴリズムでは, S -制約を用いて先ず枝全体の test を行ない, 枝に属する x の vector を $[IS]$ に対して infeasible であるか, または $g(x) < g(\bar{x})$ (ただし \bar{x} は $[IS]$ の最適解) であることが判明したら直ちにその枝を棄てて隣の枝へ移ってよい。従つて 2 つの S -制約 $f(x) \geq 0$ と $\bar{f}(x) \geq 0$ とがあったとき

$$\min \{ g(x) \mid f(x) \geq 0, x \in \Omega \} \geq \min \{ g(x) \mid \bar{f}(x) \geq 0, x \in \Omega \}$$

ならば 制約 $f(x) \geq 0$ の方を $\bar{f}(x) \geq 0$ より「強い」という。

実際に tree search 型のアルゴリズムを実施してみると極端に時間を消費することが多い。しかし, 新しい枝に到達したとき, 枝に対するあらゆる test に先行して, 枝の中に残さ

れた変数に対するなるべく強力な δ -制約を構成し、これを用いてあらかじめ分枝に関する情報をできるだけ多く引き出して、⁽¹⁾おいてこれを以後の作業に活用すること、Gloverが線型問題で示したように極めて有効であり、また以下に示すように非線型問題に対しても有効性を失わないのである。

次のような定理1では、ある δ -制約の feasible region が原制約、それよりも広いときは、前と異なる feasible region をもつ新しい δ -制約を構成しうることを示し、定理2では、 $m=2$ のときには、定理1の結果を用いて「最強の」 δ -制約を構成することか可能であること、ならびにその構成のしかたを即ち

$$\max_{u \in U} \min \{g(x) \mid f(x) \geq 0 \text{ (} f=uF \text{), } x \in \Omega\} = \min_{x \in \Omega} \{g(x) \mid \bar{u}F(x) \geq 0\}$$

なる $\bar{u} \in U$ を求め方が示される。

【定理1】 [I δ] の feasible solution \bar{x} が [I] で Γ infeasible であるとき、

$$M_1 = \{i \mid F_i(\bar{x}) \geq 0, i \in M^+\}, \quad M_2 = \{i \mid F_i(\bar{x}) < 0, i \in M^+\} \neq \emptyset,$$

$$\varphi_v = \sum_{i \in M_1} u_i F_i + v \sum_{i \in M_2} u_i F_i \quad (v > 0),$$

$$\Delta^+ = \sum_{i \in M_1} u_i F_i(\bar{x}), \quad \Delta^- = -\sum_{i \in M_2} u_i F_i(\bar{x})$$

とすると

$$0 < v \leq \Delta^+ / \Delta^- \Rightarrow \varphi_v(\bar{x}) \geq 0,$$

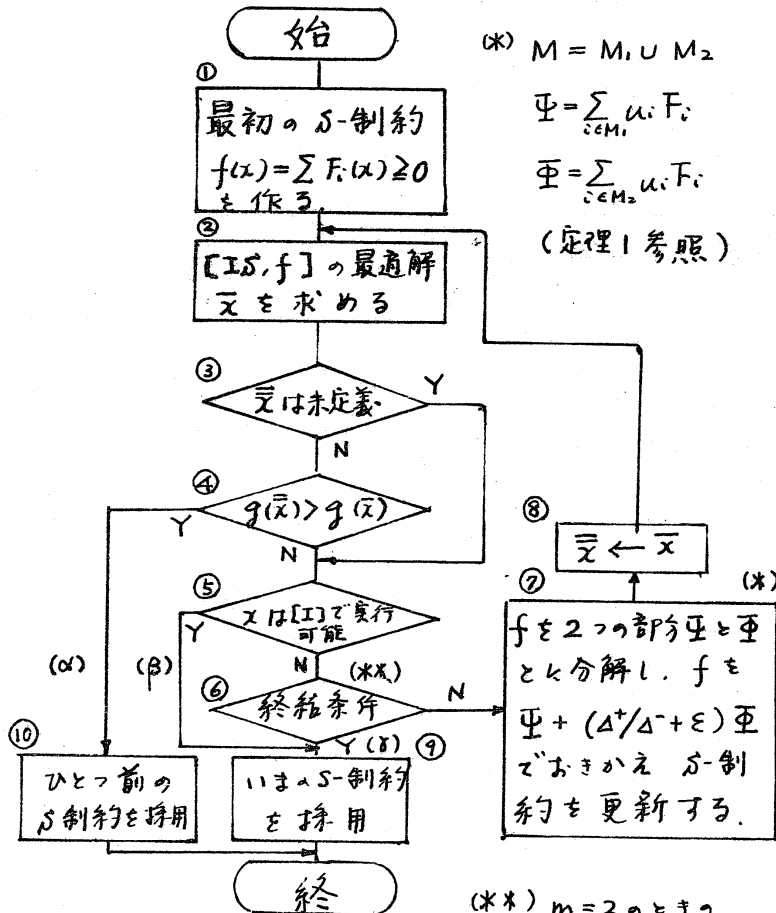
$$v > \Delta^+ / \Delta^- \Rightarrow \varphi_v(\bar{x}) < 0.$$

【証】 lemma 3° から $\Delta^+ > 0$ 、仮定により $\Delta^- > 0$ で

$$\varphi_v(\bar{x}) = \Delta^-(\Delta^+/\Delta^- - v) \text{ は } \Delta^+/\Delta^- - v \text{ と同符号.}$$

[定理 2] $m=2$ のとき, [I] が feasible ならば, 第 1 図のアルゴリズムが [I] に対する最強の δ -制約を与えるような $\varepsilon(>0)$ の値が存在する。

[証] 第 1 図の i 回につくられた δ -制約を $F(x) + G(x) \geq 0$ とし, i 回目で i 回目につくられた最適解を x^i とする。 $F(x^i) \geq 0, G(x^i) \geq 0$ ならば $F+G \geq 0$ が最強の δ -制約である (lemma 5° と 4°)。 *



(第 1 図)

うでない場合は,

$$F(x^i) \geq 0, G(x^i) < 0$$

を仮定してよい。

$$f_v = F + vG \quad (v > 0)$$

とし, 問題

$$(1) \min \{g(x)\}$$

$$f_v(x) \geq 0, x \in \Omega$$

の最適解を $x[v]$ と

すると,

$$(2) \exists v > 1 (G(x[v]) \geq 0).$$

なぜなら, Ω は有

限集合だから,

$$v_0 \leq v < \infty \text{ なる}$$

すべての v に対し

て $x[v_0]$ が (1) の最適解となつてゐるような $v_0 (> 1)$ が存在しなければならぬ。しかし、 $1 < v < \infty$ なる v に対しては $G(v[v]) < 0$ だとすると、 $G(x[v_0]) < 0$ であつて、定理 1 によつて $v > -F(x[v_0])/G(x[v_0])$ なる v に対して $x[v_0]$ は $f_v(x) \geq 0$ をみたさない。これは $v_0 \leq v < \infty$ なる v に対して、 $x[v_0]$ が (1) の最適解であることと矛盾。故に (2) が成立。

$G(x^i) < 0$ ($i \geq 1$) のとき、 $v^i = -F(x^i)/G(x^i)$ とおけば、定理 1 により $v^i < v$ なる v に対して x^i は (1) に対し *infeasible*。次の x^{i+1} を定めるのに用ゐらる新しい δ -制約 (これは box 7 で作られる) を $F + (v^i + \delta^i)G \geq 0$ とすると、 $\delta^i > 0$ 。そして δ^i の値はあらかじめ ε の値を十分小さく選んでおくことによつて十分に小さくすることが出来る。 \mathcal{J} は有限集合であるから $\delta^i (> 0)$ を適当に小さな値にしておくことにより、 $x^{i+1} = x[v^i + \delta^i]$ を $v^i < v \leq v^i + \delta^i$ なる v に対しては (1) の最適解たらしめることができる。

従つて 第 1 図の $\varepsilon (> 0)$ が適当に小さく選んでおけば、 $x^1 = x[1]$ から出発して $G(x^k) < 0$ ($k \leq i$) である限り上記のよき解の列 $x^{(k+1)} = x[v^k + \delta^k]$ ($1 \leq k \leq i$) を逐次作る事ができ、定理 1 によつて $\forall x^k, 0 < v \leq v^k$ なる v に関する (1) の *feasible solution* だから $g(x^{k-1}) \leq g(x^k)$ が成立。一方、 $v^k < v^{k+1}$ であるから、(2) によつて、やがてある番号 N で

$$G(x^i) < 0 \quad (1 \leq i \leq \nu-1) \quad \text{かつ} \quad G(x^\nu) \geq 0$$

が成り立たねばならない。 x^ν に対しては (i) または (ii) が成立。

[I] の

(i) $F(x^\nu) \geq 0$ ならば lemma 5° によつて x^ν が optimal solution

で、得られた δ -制約は lemma 4° によつて最強である (判図 (β))。

(ii) $F(x^\nu) < 0$ のとき, $x^\nu = x[x^{\nu-1} + \delta^{\nu-1}]$ は定理 1 によつて

$u^{\nu-1} + \delta^{\nu-1} \leq \nu < \infty$ なる ν に対して (1) の実行可能解である。また

前述のよゝに ε は適当に小さく選ばれていて, x^ν は $u^{\nu-1} < \nu$

$\leq u^{\nu-1} + \delta^{\nu-1}$ なる ν に対して (1) の最適解となつてゐる。故に

$$(3) \quad g(x^\nu) = \max_{u^{\nu-1} < \nu < \infty} \min \{ g(x) \mid F + \nu G \geq 0, x \in \Omega \}.$$

また前記のよゝに $x^{\nu-1}$ は $0 < \nu \leq u^{\nu-1}$ なる ν に関する (1) の

実行可能解だから

$$g(x^{\nu-1}) = \max_{0 < \nu < u^{\nu-1}} \min \{ g(x) \mid F + \nu G \geq 0, x \in \Omega \}.$$

故に

$$(4) \quad \max_{0 < \nu < \infty} \min \{ g(x) \mid F + \nu G \geq 0, x \in \Omega \} = \begin{cases} g(x^\nu), & g(x^\nu) \geq g(x^{\nu-1}) \\ g(x^{\nu-1}), & g(x^\nu) < g(x^{\nu-1}) \end{cases}$$

$g(x^\nu) \geq g(x^{\nu-1})$ のとき, $F(x^\nu) < 0$ か $G(x^\nu) \geq 0$ であつたから判図 (γ) による loop 脱出が行なわれ, 最強の δ の δ -制約が採用される。

最後に, 判図 (α) による loop 脱出が (4) の $g(x^\nu) < g(x^{\nu-1})$ に対応する。即ち (α) では $g(x^{i-1}) > g(x^i)$ がはじめて成立してゐる, 前頁で述べたよゝに $G(x^k) < 0 \Rightarrow g(x^{k-1}) \leq g(x^k)$

であるから $loop$ を (4) で脱出したとき $G(x^v) \geq 0$ がはいめて成立してよりこの番号 i が前記 i に他ならない。そして番号 i で $F(x^v) < 0$ となっている。(もしそうでなければ x^v は lemma 5° によ^[I]り \wedge optimal solution であるが、^{このとき} lemma 4° によ^[I]り $g(x^{v-1}) \leq g(x^v)$ となり (4) の脱出条件と矛盾する) このとき採用される $s(v-1)$ S -制約は (4) の2行目によ^[I]り最強である。(証終)

この定理によ^[I]りて、 $m=2$ の場合とは、最強の S -制約の構成の原理的な保証が与えられる。しかし実際に S -制約の構成を行なふとするといくつかの問題点にぶつかる。

<i> エンタメ方。原理的には $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots$ と漸次 ε を小さくしてゆけば最後に残る S -制約の列は最強の制約に収束するであろうがこれは実用的な方法ではない。また特定の ε の値について上記のアルゴリズムを施行したとき、最強制約を網の目から逃してしまうかも知れない。

<ii> $m \geq 3$ のとき、定理2に用いられたアルゴリズムの終結条件 (Box 6 で $G(\bar{x}) < 0$ and $G(\bar{x}) \geq 0$) は利用できない。

<iii> 表1図によ^[I]れば Box 2 の中へ $loop$ 入る度に、整数計画問題を解かねばならない。制約不等式が1個しかないとはいえ整数最適解を求めるさへ、本質的な困難は厳存している。 S -制約の構成は、本来整数計画問題を解く手段であつた。

(1)~(4)

まず<i>i</i>について。線型の場合でも、非線型の場合でも最強の S -制約が容易に得られらる場合には問題ないが、経験上、最強でなくても「かなり強力な」 S -制約でも十分に有用であるから、*tree search* の効率を高めるという目的のためには、ある小さな ϵ について上記アルゴリズムを遂行すればよい。また<i>ii</i>については、分枝図のアルゴリズムで更新される S -制約は、定理1によつてその *feasible region* が次第に変形されてゆき、その結果目的関数の最適値が次第にせり上げられてゆく——即ち「強化」されてゆくのであるから、「かなり強力な」 S -制約でありさえすればよいという立場から「あらかじめ決めておいた回数だけ『強化』を行なったこと」を終結条件とする——という Glover の処理法は非線型の場合にも継承してよいだろう。最後は<i>iii</i>について。F. Glover の最初の手法に対する *variation* がいくつか提唱されているが、いずれも<i>iii</i>の解決がその *motivation* となっている。しかしながら、これらの *variation* は、本質的に問題の線型性に依拠しており、非線型問題への拡張は不可能である。(この *variation* はいずれも「最強の」 S -制約の代りに「かなり強力な」 S -制約が得られればよいという立場から、 S -制約に関する整数-実数混合ミニマックス問題を通常、実数ミニマックス問題で近似させることによつて LP の諸命

題を借用する。非線型問題 [I] については、関数の凸性・凹性を適当に仮定して「近似的に最強の」 S -制約を決定する手法をパラメトリック LP に帰着させることができるが、実用性の点では未だ十分検討していないけれども、疑問がある) (iii) の問題、即ちある S -制約の下で最適整数解を求めるにはやはり本格的な *tree search* (たとえば) が必要である。そして強力な S -制約を構成しておくことは、原問題の *tree search* の手数を大中に減殺することになる。だから、box 2 で原問題の解法ルーチンを借用して大局的には有意義な場合もあるであろう。しかし、ここでは「かなり強力な」 S -制約が求められやすいという立場から、「制約不等式が 1 個しかない場合、非線型整数計画問題の簡単な近似解法」をいくつか先ず試みることを提唱する。本格的な解法にくらべてごく短い時間で決着がつくから、*feasible solution* が全く得られなかった場合にだけ本格的なルーチンを call すればよい (*feasible solution* を得たあとは粗いきざりで目的関数値を「せり下げ」ればよい) からである。

次にこの「示るのを兼ねた近似解法」——これは問題が線型であるような *special case* には Glover のアルゴリズム⁽¹⁾に帰着する——のため諸定理をのべる。

§3 近似解法の準備

まず $0 \leq x_j \leq \lambda_j$ なる x_j を $x_j = x_{j1} + 2x_{j2} + 2^2x_{j3} + \dots$ と展開し $x_{jk} (= 0 \text{ or } 1)$ を新変数とみなすことができるから、問題の変数を全部 0-1 変数とみなしてもよい。このとき $g(x)$ は各変数の積で展開できる⁽⁵⁾から $g(x)$ は x_j の多項式であるとしておいてもよい。また $\partial g / \partial x_j \geq 0$ と仮定してもよい。たとえば $g(x) = -x_1 + x_2^2 - 5x_3x_4$ ならば $x_1' = 1 - x_1$ と x_1 の代りを用い、 $x_3' = 1 - x_3x_4$ と x_3, x_4 の代りを用いれば $g(x) = x_1' + x_2^2 + 5x_3' - 6$ となる。そして原問題 [I] の制約式に $1 - x_3' \geq x_3x_4 \geq 1 - x_3'$ 又は $2 - x_3' \geq x_3 + x_4 \geq 2(1 - x_3')$ を追加すれば [I] と同等な問題が得られ目的関数の偏微係数 ≥ 0 となる。

以下の諸定理で [定理6] 以外では、 x_j を 0-1 変数であるとくに仮定してはいるが上記の事情は定理の有効さを増加する。

【定理3】 [FS] または [IS] が feasible ならば 次の成分をもつ [FS] または [IS] の最適解が存在する。

$$x_i = \begin{cases} \lambda_i & \text{if } f_i(x) \geq 0 \text{ and } g_i(x) \leq 0 \\ 0 & \text{if } f_i(x) \leq 0 \text{ and } g_i(x) \geq 0 \end{cases} \quad (x \in X)$$

$$\text{ただし } f_i(x) = \partial f / \partial x_i, \quad g_i(x) = \partial g / \partial x_i$$

【証】 \bar{x} が最適解で、番号 $i \in P \subseteq N$ につき上記と異なる成分をもつていたとする。このとき $\delta_i (i \in N)$ を

$$\delta_i = 0 \quad (i \notin P), \quad \delta_i = \lambda_i - \bar{x}_i \quad (i \in P, f_i \geq 0, g_i \leq 0), \quad \delta_i = -\bar{x}_i$$

($i \in P, f_i \leq 0, g_i \geq 0$) と定めると $\hat{x} = \bar{x} + \delta$ は定理 4
 の仮定を満たすから、 $f(\hat{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in P} \int_0^1 f_i(\theta \hat{x} + (1-\theta)\bar{x}) d\theta \cdot \delta_i \geq f(\bar{x})$
 従って \hat{x} は feasible, $g(\hat{x}) = g(\bar{x}) + \sum_{i \in P} \int_0^1 g_i(\theta \hat{x} + (1-\theta)\bar{x}) d\theta \cdot \delta_i \leq g(\bar{x})$
 であるから \hat{x} は optimal.

[定理 4] ある $\bar{x} \in X$ に対して $\alpha_i(\bar{x}, x) > 0, \beta_i(\bar{x}, x) \geq 0$
 ($x \in X, i \in N$) であり、ある $r \in N$ に対して $\beta_i(\bar{x}, x)/\alpha_i(\bar{x}, x)$
 $\leq \beta_r(\bar{x}, x)/\alpha_r(\bar{x}, x)$ 或 $\beta_i(\bar{x}, x)/\alpha_i(\bar{x}, x) > \beta_r(\bar{x}, x)/\alpha_r(\bar{x}, x)$
 ($x \in X, i \in N$) のいずれかが成立し

$$\bar{x} = \begin{cases} \lambda_i, & \text{if } \beta_i/\alpha_i \leq \beta_r/\alpha_r \\ 0, & \text{if } \beta_i/\alpha_i > \beta_r/\alpha_r \end{cases} \quad (i \neq r) \quad \text{ただし}$$

$$g(\bar{x}) = \min \{ g(x) \mid f(x) \geq f(\bar{x}), x \in X \}$$

$$\text{ただし, } \alpha_i(x, y) = \int_0^1 f_i(\theta x + (1-\theta)y) d\theta$$

$$\beta_i(x, y) = \int_0^1 g_i(\theta x + (1-\theta)y) d\theta$$

[証] $f(x) \geq f(\bar{x})$ なる任意の $x \in X$ に対して $\delta_i = \alpha_i - \bar{x}_i$
 を作れば、 \bar{x}_i の定義から $\delta_i(\beta_i/\alpha_i - \beta_r/\alpha_r) \geq 0$. 一方

$$f(x) - f(\bar{x}) = \sum_i \delta_i \int_0^1 f_i(\theta x + (1-\theta)\bar{x}) d\theta = \sum_i \alpha_i(\bar{x}, x) \delta_i \geq 0$$

$$\therefore \delta_r \geq -\sum_{i \neq r} \alpha_i \delta_i / \alpha_r \quad \therefore g(x) - g(\bar{x}) = \sum_i \beta_i(\bar{x}, x) \delta_i$$

$$\geq \sum_{i \neq r} (\beta_i - (\beta_r/\alpha_r) \alpha_i) \cdot \delta_i \geq 0$$

[定理 5] X の任意の 2 点 x, y に対して $\alpha_i(x, y) > 0$,

$\beta_i(x, y) \geq 0$ ($i \in N$) であり、変数番号が

$$\beta_p/\alpha_p < \beta_q/\alpha_q \iff p < q \quad \text{となるようにつけられているとき,}$$

$$\xi_i^k = \begin{cases} \lambda_i & , i \leq k \\ 0 & , i > k \end{cases}$$

$$r = \min \{k \mid f(\xi^k) \geq 0, 0 \leq k < n\}$$

なる r が存在するとは [F.S.] に 次のような最適解が存在する。

$$\bar{x}_i = \begin{cases} \lambda_i & , i < r \\ 0 & , i > r \end{cases}, \quad 0 < \bar{x}_r \leq \lambda_r$$

もしそのような r が存在しなければ [F.S.] は *infeasible*.

[証] $n \geq r \geq 1$ のとき $g(\bar{x}_r) = f(\bar{x}) = f(\xi^r) + d_r(\bar{x}, \xi^r)$.

$\times (\bar{x}_r - \lambda_r)$ とすれば $g(\lambda_r) = f(\xi^r) \geq 0$. r の定義より

$$g(0) = f(\xi^{r-1}) < 0 \quad g \text{ は連続だから } 0 < \bar{x}_r \leq \lambda_r \text{ なる}$$

ある \bar{x}_r の値に対して $g(\bar{x}_r) = f(\bar{x}) = 0$ とする. 二つ

とき 前定理から $g(\bar{x}) = \min \{g(x) \mid f(x) \geq 0, x \in X\}$ と

なり定理は成立.

$r = 0$ のとき $\bar{x} = 0$. 従って $f(\bar{x}) \geq 0$. 任意の

$$x \in X \text{ に対し } x_i \geq \bar{x}_i \quad \therefore g(x) - g(\bar{x}) = \sum_i (x_i - \bar{x}_i) \beta_i \geq 0.$$

故に定理は成立.

r が存在しないときは, $f(\xi^n) < 0$. 任意の $x \in X$

$$\text{に対し } x_i \leq \xi_i^n \quad \therefore f(x) = f(\xi^n) + \sum_i (x_i - \xi_i^n) \alpha_i \leq f(\xi^n) < 0$$

故に [F.S.] は *infeasible*.

[定理 6] $\lambda_i = 1 (i \in N)$ で $f_i(x) > 0, g_i(x) \geq 0 (x \in X,$

$i \in N)$ とする。変数番号の適当な交換により $p \leq r,$

$q > r$ ならば $f_p(x) \geq f_q(x)$ か $g_p(x) \leq g_q(x) (x \in X)$

であるような番号 $p, q \in N$ が存在し,

$$\bar{x}_i = \begin{cases} 1, & i \leq r \\ 0, & i > r \end{cases}$$

なる \bar{x} に対して $0 \leq f(\bar{x}) < f_k(x)$ ($k \leq r, x \in X$)

が成り立つならば

$$g(\bar{x}) = \min \{g(x) \mid f(x) \geq 0, x \in \Omega\}$$

[証] $f(x) \geq 0$ なる任意の $x \in \Omega$ に対して

$\delta_i = x_i - \bar{x}_i$ を作れば $\sigma = \sum_i \delta_i$ は非負の整数である。なぜならば $\sigma \leq -1$ と仮定すると

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\bar{x}) + \sum_i \int_0^1 f'_i(\xi) \cdot \delta_i d\theta \quad (\xi = \theta x + (1-\theta)\bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) - \sum_{i \leq r} \int_0^1 f'_i(\xi) d\theta \cdot |\delta_i| + \sum_{i > r} \delta_i \cdot \int_0^1 f'_i(\xi) d\theta \end{aligned}$$

$$\min_{i \leq r} \int_0^1 f'_i(\xi) d\theta = \int_0^1 f'_{i_0}(\xi) d\theta = \mu \quad \text{とすると}$$

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(\bar{x}) - \mu \sum_{i \leq r} |\delta_i| + \sum_{i > r} \delta_i \int_0^1 f'_i(\xi) d\theta \\ &= f(\bar{x}) + (\sigma - \sum_{i > r} \delta_i) \mu + \sum_{i > r} \delta_i \int_0^1 f'_i(\xi) d\theta \\ &\leq f(\bar{x}) + \sigma \cdot \mu \\ &\leq f(\bar{x}) - \int_0^1 f'_{i_0}(\xi) d\theta = \int_0^1 [f(\bar{x}) - f'_{i_0}(\xi)] d\theta < 0 \end{aligned}$$

となる。 $f(x) \geq 0$ と矛盾するからである。

$$\begin{aligned} \text{また} \quad g(x) - g(\bar{x}) &= - \sum_{i \leq r} |\delta_i| \int_0^1 g'_i(\xi) d\theta + \sum_{i > r} \delta_i \int_0^1 g'_i(\xi) d\theta \\ &\geq \sigma \cdot \min_{i > r} \int_0^1 g'_i(\xi) d\theta \geq 0 \quad \text{が前と同様に得ら} \end{aligned}$$

れる。

$$\text{故に} \quad g(\bar{x}) = \min \{g(x) \mid f(x) \geq 0, x \in \Omega\}.$$

§4 近似最適解のためのアルゴリズム

前節の諸定理を足場として, 本節では $\mathcal{C} \times \mathcal{Z}$ で用いるためのアルゴリズムを構成する。本節では $\lambda_i = 1, \partial g / \partial x_i \geq 0$ ($i \in N$) が仮定されている。

x を Ω の任意の元とするとき, $x(i)$ は x の i 番目の成分 x_i を $1 - x_i$ で置きかえた vector を表わすものととする。 $x \in \Omega \Leftrightarrow x(i) \in \Omega$ である。 $\alpha(i), \beta(i)$ を次のように定義する。

$$\alpha_i(x) = \int_0^1 f_i(\theta x(i) + (1-\theta)x) d\theta = f(x_i=1) - f(x_i=0)$$

$$\beta_i(x) = \int_0^1 g_i(\theta x(i) + (1-\theta)x) d\theta = g(x_i=1) - g(x_i=0)$$

ただし, 右辺の $f(x_i=1)$ は $x_j (j \neq i)$ には左辺の x_j の値を; x_i には 1 を代入した $f(x)$ の値である。

ある $x \in \Omega$ に関して, その各成分 x_i へ, 次の規則によって「局所順位」 $p_i(x)$ を与える。 $1 \leq p_i \leq n$ であるが, タイが生じたら, たとえば変数番号順に順位を与えよばよい。

$$\langle i \rangle \quad \alpha_i(x) > 0, \alpha_j(x) \leq 0 \implies p_i < p_j$$

$$\langle ii \rangle \quad \alpha_i(x) > 0, \alpha_j(x) > 0 \quad \text{ならば}$$

$$\beta_i / \alpha_i < \beta_j / \alpha_j \implies p_i < p_j$$

$$\beta_i / \alpha_i = \beta_j / \alpha_j, \alpha_i < \alpha_j \implies p_i < p_j$$

$$\langle iii \rangle \quad \alpha_i(x) \leq 0, \alpha_j(x) \leq 0 \quad \text{ならば}$$

$$\beta_i - \alpha_i < \beta_j - \alpha_j \implies p_i < p_j$$

さて, 図 60x2 のための近似最適化のアルゴリズムは次の通りである。

《Stage I》

- 1° $x_i = 0 \quad (\forall i \in N)$ set
- 2° $f(x) \geq 0$ ならば go to 《Stage II》 1°
- 3° 各 x_i に対し $p_i(x)$ を計算
- 4° $\forall i \in N (x_i = 1)$ ならば tree searchへ (§2の終参照)
- 5° $p_j = \min \{p_i \mid x_i = 0, i \in N\}$ なる j につき $x_j = 1$ set, go to 2°.

《Stage II》

- 1° $\forall i \in N (p_i = 0 \text{ 或 } x_i = 0)$ ならば stop. このときの x が近似最適解である.
- 2° $p_k = \max \{p_i \mid x_i = 1, i \in N\}$ なる k につき $x_k = 0$ とする.
- 3° 各 x_i (ただし $p_i = 0$ または $x_i = 0$ のものを除く) について $p_i(x)$ 計算
- 4° $f(x) < 0$ ならば x_k の値を 1 に戻して, $p_k = 0$ とし go to 1°.
- 5° $f(x) \geq 0$ ならば go to 1°

この方法では, 「今の x 」に対する「次の x 」は $x(1), \dots, x(n)$ のどれかである。又から $x(i)$ へ移ると $f(x), g(x)$ の

値は《Stage I》ではそれぞれ $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$ ずつ増加し,
 《Stage II》ではそれぞれ $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$ ずつ減少する。
 また《Stage I》で x の「次の x 」の候補 $x(i)$ ($x_i=0$,
 $i \in N$) のなかから, 5° の step で $x(j)$ が選出されたとき,

$$g(x(j)) = \min \{ g(x(i)) \mid f(x(i)) \geq f_0, i \in N, x_i=0 \}$$

が成り立つ。ここで $f_0 = f(x(j))$ である。何故

$$\text{なら, } g(x(j)) - g(x(i)) = \beta_j(x) - \beta_i(x), f(x(j)) - f(x(i)) =$$

$$\alpha_j(x) - \alpha_i(x) \text{ であるが, 局所順位 } f_i(x) \text{ の定義から, 5°}$$

の step で選ばれた j に対し, $i \in N$ and $x_i=0$ なる i について

$$\alpha_j - \alpha_i \leq 0 \implies \beta_j(x) - \beta_i(x) \leq 0 \text{ が成立し}$$

ているからである。

これを反復して《Stage I》で実行可能解を得た後に

《Stage II》に於て全局的な最適性から「すく」の補正が,

再び局所最適補正に近いやうな反復で実行される。

従って《Stage I》4° で外へ飛び出すのは, 局所的には有効な方策であっても効果が累積していないのか, すぐ隣りの格子点 $x(i)$ 以外の点に有効な「次の x 」があるのか, または $f_i(x)$ や $g_i(x)$ の変動が大きいため局所順位数 $f_i(x)$ がはや「次の x 」の選出の日やうになっていない — などの場合であろう。また $f_i(x)$, $g_i(x)$ の変動が, [定理3] および [定理5,6] の適用条件の成立を妨げるほど大きくないならば

上記アルゴリズムは《Stage II》¹⁰で完結する。線型問題では $f(x)$, $g_i(x)$ が定数であるから事情は極めて簡単である。^{[I] とおける} 左。なお、制約不等式や $g_i(x)$ の中、非線型項を全部新しい 0-1 変数とおきかえて、線型不等式を余分につぎとして線型問題におきかえることが原理的には可能であり、またこのようにすれば上記のアルゴリズムはひとつの δ -制約を与えるが、このような「線型化」は原変数では矛盾のある非論理的な解を許容するような δ -制約をもちあうので、特別の事情のない限り好ましくないと思われる。

〈 文 献 〉

- (1) F. Glover, A Multiphase-Dual Algorithm for the Zero-One Integer Programming Problem, *Ops. Res.* 13 (65) 879-919.
- (2) E. Balas, Discrete Programming by the Filter Method, *ibid* 15 (67) 915-957.
- (3) A. M. Geoffrion, An Improved Implicit Enumeration Approach for Integer Programming, *ibid* 17 (69) 437-454.
- (4) F. Glover, Surrogate Constraints, *ibid* 16 (68) 741-454.
- (5) T. L. Saaty, "Optimization in Integers and Related Extremal Problems", McGraw-Hill (70) P. 259.